

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
 - a. Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
 - d. Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$.
En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Interpréter graphiquement la quantité I_n .
 - b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) . Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

- b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

- c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

- b. En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.