

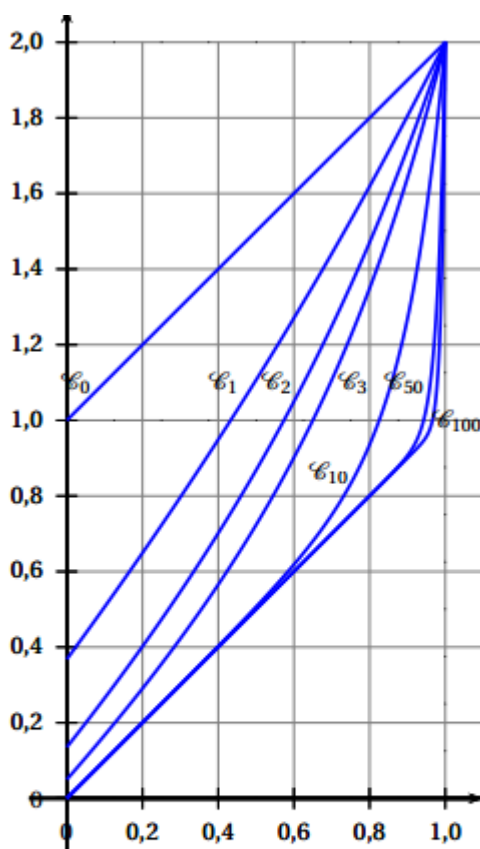
Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_n$ sont représentées ci-contre.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.



Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leq x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie C : aire sous les courbes $\mathcal{C}_n$

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.