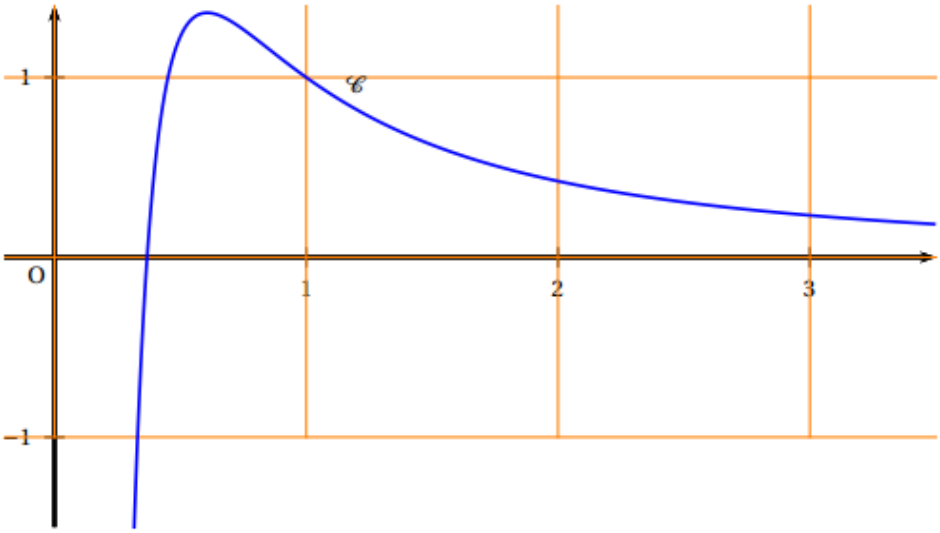
Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+00[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+00[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de In en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.