EXERCICE 12

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$ $\qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

1/ Calcul de *I*

Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$

b) En déduire la dérivée f' de f

c) Calculer I

2/ Calcul de *J* et de *K*

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que :

$$J + 2I = K$$

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que :

$$K = \sqrt{3} - J$$

c) En déduire J et K

EXERCICE 13

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,\mathrm{d}x$$

1/ Calculer les deux intégrales :

$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$

2/ Déterminer les réels a, b et c, tels que, pour tout réel t positif, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad \mathbf{(1)}$$

(**<u>Suite exercice 13</u>**)

3/ En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1),** calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$$

4/ Etablir une relation entre J et I

En déduire J à l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.