Interrogation sur les intégrales

Exercice 1 : (6 points) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 2e^{3x}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

e) Calculer à l'aide d'une intégration par parties: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 (6 points)

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver la primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ telle que $F(1)=1$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x dx$.

On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 3 (6 points)

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n : $u_n(a)=\displaystyle\int_0^1 x^n\exp(a(1-x))\,dx$.

1. Calculer $u_0(a)$.

2. Montrer que pour tout n dans • : $0\le u_n(a)\le \dfrac{e^a}{n+1}$.

3. Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante.

4. Forme explicite de $u_n(a)$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $u_n(a)$ et $u_{n+1}(a)$.

b. Question facultative : montrer par récurrence sur n que pour tout n dans ℕ : $u_n(a)=\dfrac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right]$.

Exercice 4 : (2 points)

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur ° .

On définit la fonction F qui, à tout réel x, associe $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction F ?
2. Déterminer deux entiers strictement positifs a et b tels que $a\le F(2)\le b$.
3. Etudier la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
	0						2		
f		↘		↗	0	↗		↘	
			-1						1