

**1. Exercice 1**

---

6 points

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .

On note  $C$  et  $C'$  les courbes représentatives respectives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal. Les courbes  $C$  et  $C'$  sont données ci-dessous.

1. a. Étudier le signe de  $\ln x(1 - \ln x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b. En déduire la position relative des deux courbes  $C$  et  $C'$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. Pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $M$  est le point de  $C$  d'abscisse  $x$  et  $N$  est le point de  $C'$  demême abscisse.
  - a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Étudier les variations de la fonction  $h$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - b. En déduire que sur l'intervalle  $[1; e]$ , la valeur maximale de la distance  $MN$  est obtenue pour  $x = \sqrt{e}$ .
  - c. Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation  $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ .
  - d. En déduire que, sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ , il existe deux réels  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) pour lesquels la distance  $MN$  est égale à 1.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_1^e \ln x dx$ .
- b. Vérifier que la fonction  $G$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$  est une primitive de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
- c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes  $C$ ,  $C'$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .  
Déterminer l'aire  $A$  en unités d'aire de cette partie du plan.

