

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I .
2. Calculer la valeur exacte de I .

Partie B : estimation de la valeur de J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc : $J = \int_0^1 g(x) dx$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

On choisit au hasard un point $M(x; y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathcal{C}_g$ est égale à l'intégrale J .

En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y , selon la loi uniforme sur $[0; 1]$;
- si $M(x; y)$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

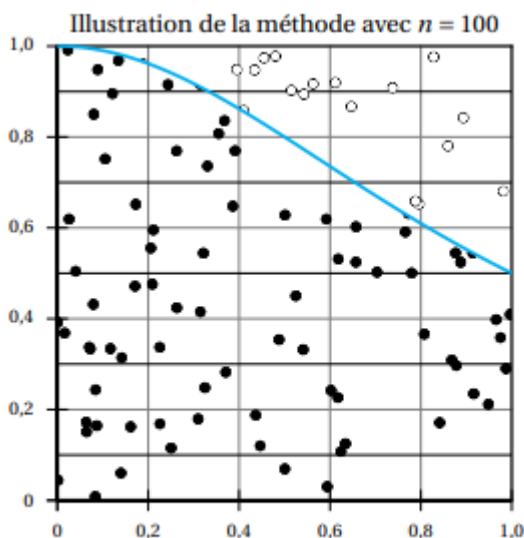
On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J . C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.

100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.

Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.

Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J .

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur ... Pour i allant de 1 à ... faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend ... Si ... alors ... prend la valeur ... Fin si Fin pour f prend la valeur ...
Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J .
3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?