

EXERCICE 1 (5 points)**Commun à tous les candidats**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f .

1) a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f .

c) En déduire le signe de f sur $\mathbf{R}$.

2) Pour tout nombre réel a , on considère l'intégrale : $I(a) = \int_0^a f(x) dx$.

a) Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b) A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

c) En déduire pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2} e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

3) Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g et $\mathcal{P}$ celle de h .

a) Montrer que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.