A) <u>rappel de seconde</u>

1) généralités

<u>Règles d'incidence</u>

<u>règle 1 :</u> Par deux points distincts, il passe une unique droite.

<u>règle 2 :</u> Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC)

<u>règle 3 :</u> Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

<u>règle 4 :</u> Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

2) positions relatives de droites et plans

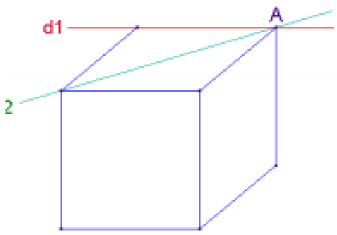
a) <u>deux droites distinctes</u>

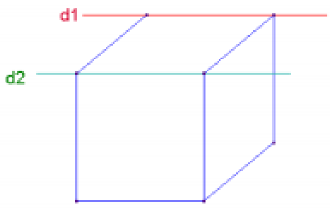
Deux droites de l'espace sont :

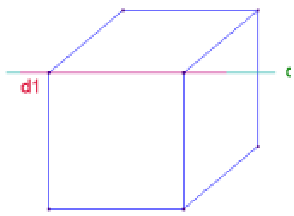
- soit **coplanaires**

d_1 et d_2 sécantes

d_1 et d_2 parallèles





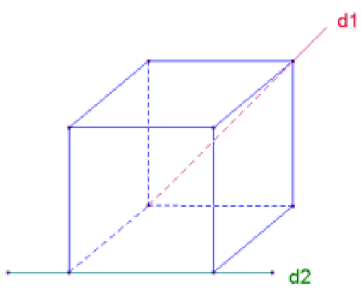


d_2 sont sécantes en A

d_1 et d_2 sont strictement parallèles

d_1 et d_2 sont confondues

- soit **non coplanaires**



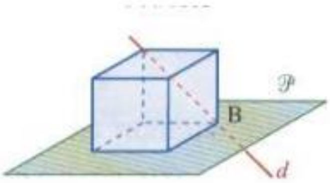
Aucun plan ne contient d_1 et d_2

2

b) Une droite et un plan

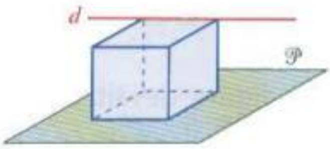
Une droite et un plan de l'espace sont :

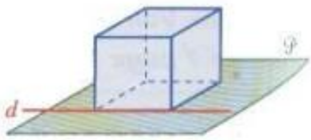
- soit **sécants**



d et P ont un point d'intersection B.

- soit **parallèles**





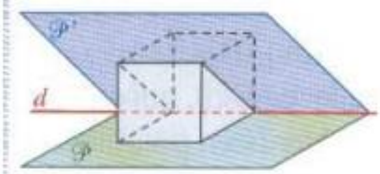
d et P sont strictement parallèles

d est contenue dans P.

c) Position relative de deux plans

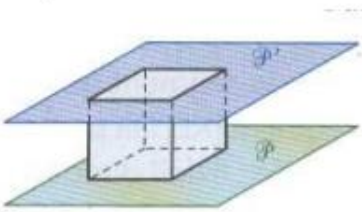
Deux plans sont :

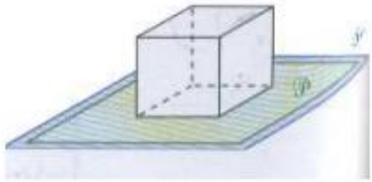
- soit **sécants**



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont une droite d'intersection d.

- soit **parallèles**





$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

3) parallélisme dans l espace

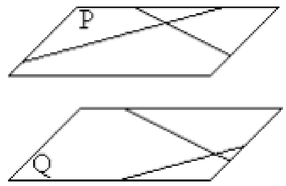
a) parallélisme entre droites

Propriété 1 : Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Propriété 2 : Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre

b) parallélisme entre plans

Propriété 3 : Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

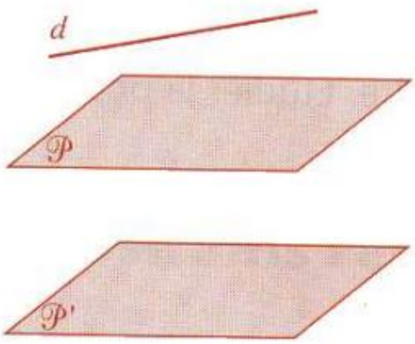


Propriété 4 : Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

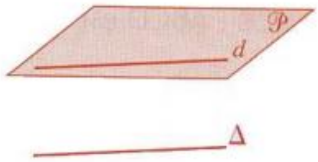
Propriété 5 : Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

c) parallélisme entre droite et plan

Propriété 6 : Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, et si une droite d est parallèle à $\mathcal{P}$, alors d est parallèle à $\mathcal{P}'$

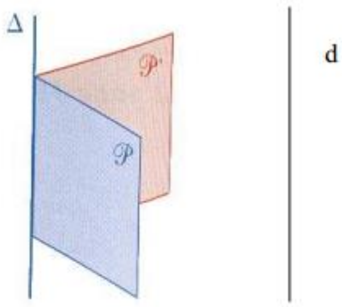


Propriété 7 : Si une droite d est parallèle à une droite Δ, et si d est contenue dans un plan $\mathcal{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathcal{P}$.



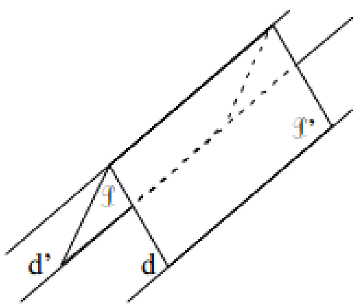
Propriété 8 : Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Propriété 9 : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans sécants selon une droite Δ, et si d est une droite parallèle à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, alors d et Δ sont parallèles.



Propriété 10 : (théorème du toit)

d et d sont deux droites parallèles. $\mathcal{P}$ est un plan contenant d, et $\mathcal{P}'$ un plan contenant d. Si, en outre, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et à d.



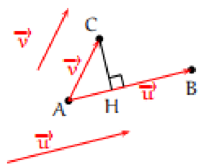
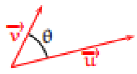
B) PRODUIT SCALAIRE DANS L ESPACE

Soit (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) un repère orthonormé de l’ espace

Si $\vec{u}$ (x ;y ;z) et $\vec{v}$ (x’ ; y’ ; z’) alors :

$\vec{u} \, . \, \vec{v}$ = x x’ + yy’ + zz’   et $\| \, \vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Si α est l’ angle ($\vec{u}$, $\vec{v}$) alors $\vec{u} \, . \, \vec{v} = \| \, \vec{u}\| \times \| \, \vec{v}\| \times \cos(\alpha)$

 $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ $\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.	 Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v}$ = $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$.	Si, dans un repère orthonormal $\mathscr{R}$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) et le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (x', y', z'), alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Si I est le milieu de [AB]   alors $x_I = \frac{X_A + X_B}{2}$ $Y_I = \frac{Y_A + Y_B}{2}$ $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

$\overrightarrow{AB}$ ($X_B - X_A$; $Y_B - Y_A$; $Z_B - Z_A$)

AB = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$

C) EQUATION CARTESIENNE D UN PLAN

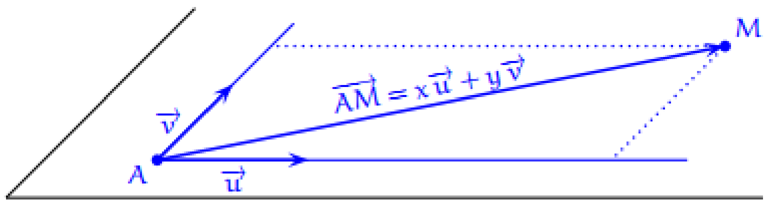
Soient a , b , c trois réels non tous nul ((a ; b ;c) ≠ (0 ; 0 ; 0))

Alors ax + by + cz +d = 0 est l équation cartésienne d un plan P

$\vec{n}$ (a ; b ; c) est un vecteur normal au plan P

D) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D’ UN PLAN

Soient $\vec{u}$ (α ; β ; γ)   et $\vec{v}$ (α’ ; β’ ; γ’) deux vecteurs directeurs d’ un plan (P) qui passe par le point A



Alors une représentation paramétrique du plan (P) est :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha\, t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta\, t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma\, t + \gamma' t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad , t' \in \mathbb{R}$$

E) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE DROITE

Soit (D) une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ (α ; β ; γ) et qui passe par A

Alors une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha\, t \\ y = y_A + \beta\, t \\ z = z_A + \gamma\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

E) METHODES

a) Si (D) une droite a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et (D') une droite a pour vecteur directeur $\vec{v}$

(D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

b) si le plan (P) et le plan (Q) ont pour vecteur normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ alors

le plan (P) et le plan (Q) sont parallèles si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires

le plan (P) et le plan (Q) sont orthogonaux si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux

c) Si (D) une droite a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et si plan (P) a pour vecteur normal $\vec{n}$ alors

le plan (P) et la droite (D) sont parallèles si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

le plan (P) et la droite (D) sont perpendiculaires si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

d) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs d' un plan (P) et Si (D) u a pour vecteur directeur $\vec{w}$

le plan (P) et la droite (D) sont perpendiculaires si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$