

1) g est la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$$

étudier g et dresser son tableau de variations
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, \pi]$

2) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\text{si } x = 0 \quad f(0) = 1$$

$$\text{si } x \in]0, \pi] \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\text{on rappelle que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Etudier les variations de f sur $]0, \pi]$

3) Etude de f en 0

a) montrer que pour tout réel $x \geq 0$: $0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$

on pourra utiliser la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \quad \text{et on calculera } \varphi', \varphi'' \text{ et } \varphi'''$$

b) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

c) Construire C_f