Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire h

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x.

2. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

6. Déterminer le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Partie B. – Etude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?

3. Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 1.
Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?

Dans la suite, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie C. – Etude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Pour tout réel $x \neq 1$, on pose $d(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $d(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-1}$.

2. Etudier le signe de $d(x)$ en fonction de x et en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
On montrera en particulier que les deux courbes se coupent en un unique point A dont on donnera les coordonnées.

3. Dans cette question, on cherche à minimiser l'écart $d(x)$ lorsque $x \in]-\infty ; 1[$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-1)^2}$ où h est la fonction définie en partie A.

b. En déduire que, sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$, l'écart $d(x)$ est minimal pour $x = \alpha$.

c. On note T_f et T_g les tangentes respectives à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse α.
Les droites T_f et T_g sont-elles parallèles ?