EXERCICE 1 **(13 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f.

b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Partie B : On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et $g(0) = 0$, la fonction f étant celle définie dans la partie A.

1. Montrer que la fonction g est continue en 0.
2. Est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.
3. Interpréter ce dernier résultat graphiquement.

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ représentatives des fonctions respectivement inverse et carrée.

Le but de l'exercice est de trouver les tangentes communes aux deux courbes.

Soit A un point de $\mathscr{H}$ d'abscisse a et B un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse b.

1. On suppose que la droite (AB) est une tangente commune à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$.

a) Montrer que $2b = \dfrac{-1}{a^2}$.

b) Démontrer que la droite (AB) a pour équation $y = 2bx - b^2$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{a} = 2ab - b^2$.

d) Déterminer les réels a et b.

2. Démontrer qu'il existe une unique droite tangente aux deux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$.