Exercice 1) (Bac C, Amiens, 1984, extrait) (10 points)

1) n étant un entier naturel, on appelle f_n la fonction définie sur]-∞ ; 1] par $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$, et on appelle C_n sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
2) Etudier la dérivabilité de fn en 1, calculer sa dérivée.
3) Etudier la limite de f_n en -∞ (on distinguera 2 cas : n pair ou n impair).
4) Déterminer l'unique élément a_n de]0 ; 1[tel que $f_n'(a_n) = 0$ pour $n \geq 1$.
5) Etudier pour $n \geq 1$ les variations de f_n, donner son tableau de variations (on distinguera 2 cas : n pair ou n impair).
6) a) Calculer la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, étudier son signe, en déduire la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.
   b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+2}.
7) Tracer C_1 et C_2

Exercice 2) (5 points)

Pour les deux fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier les limites aux bornes : f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+2}+x$, g définie par $g(x) = \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-2x}$.

Exercice 3) (5 points)

1) On appelle f la fonction définie sur [1 ; +∞[par $f(x) = x(x-1)^2$. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution a unique dans [1 ; 2].
2) On appelle g la fonction définie sur [1 ; +∞[par $g(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a le même ensemble de solutions que l'équation $f(x) = 1$.
3) a) Montrer que pour tout x de [1 ; +∞[, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire que pour tout x de [1 ; +∞[, $|g(x)-a| \leq \dfrac{1}{2}|x-a|$ (*cette question n'est plus au programme de TS*)