Exercice 1 : 3 points

A traiter sans calculatrice avant de traiter la suite

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ $\qquad g(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^4$ $\qquad h(x) = \frac{5}{\left(\frac{x}{3} - 1\right)^3}$

Exercice 2 : 3 points (Bac S, Liban juin 2005)

On donne quatre affirmations ci -dessous, préciser si elles sont vraies ou fausses.

Vous indiquerez sur la copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,75 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si *a* est un nombre réel quelconque et *f* une fonction définie et strictement décroissante sur $[a;\ +\infty[$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ »

2. Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$:

« Si *f* est continue sur $\mathbb{R}$ alors *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».

3. « Si f est une fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0;\ +\infty[$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ »

4. On considère un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de *f* dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ».

Exercice 3 : 6 points

Soit n un entier $n \geq 1$. On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$ sur $[0\,;1]$.

1. Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et montrer que $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
2. Étudier le sens de variation de f_n et montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique que l'on notera a_n.
3. Démontrer que $f_{n+1}(a_n) \geq 1$. En déduire que la suite (a_n) est décroissante.
4. Démontrer que la suite (a_n) est convergente.