

Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire**(10 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) Étude d'une fonction auxiliaire

On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

- Étudier les variations de la fonction g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$
- Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.
- Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) Étude de la fonction f

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
- Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$
- À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
- En écrivant $f(x) = \frac{x(x^3 - 4)}{x^3 + x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$
- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
- Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?

3) Représentation de la fonction f

- Recopier puis remplir le tableau de valeurs suivants :

x	-4	-2,5	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en indiquant les tangentes horizontales et en s'aidant du tableau de valeurs de la question précédente.