EXERCICE 1 (9 points)

1. a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$. Etudier le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.
 b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α . Donner une valeur approchée de α au centième près.
 c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

- a) Montrer que la dérivée f' de la fonction f a le même signe que $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.
 b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes.
 c) Dresser le tableau de variations de f et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.
 d) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f . Préciser la position relative de (d) et de C.
 e) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2.
 f) Construire C, les asymptotes et les tangentes en 2 et en α , dans un repère orthonormé.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.

b) Etudier la limite de la fonction f en 0. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Question subsidiaire : La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

EXERCICE 1 : Le but de cet exercice est de calculer quelques limites de fonctions :

1. On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 + x^2 - 3}{x^5 + x^4 - 2}$; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) on pose $u(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 3$ et $v(x) = x^5 + x^4 - 2$; vérifier que pour tout $x \neq 1$, on a

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{u(x)-u(1)}{x-1}}{\frac{v(x)-v(1)}{x-1}}$$

c) Que représente $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x)-u(1)}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{v(x)-v(1)}{x-1}$? Déterminer alors ces limites.

d) En déduire la limite cherchée.

e) Utiliser la même méthode pour déterminer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^3+x}$.

2. On veut calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) Montrer que, pour tout x réel, on a $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; en déduire la limite cherchée.