Exercice 3 *(8,5 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2(x + 2)$.

1°) Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 4$ admet, sur $[0\,;+\infty[$, une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.

3°) En déduire la résolution de l'inéquation $g(x) > 4$ sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1°) Etudier la parité de f.

2°) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, en déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f) ?

3°) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.

4°) a) Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ puis que :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{g(x^2)} - 2}{x^2\sqrt{x^2+2}}.$$

b) Déduire de la partie **A** que $f'(x) > 0$ sur $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

c) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

5°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6°) Tracer la courbe (C_f) en s'aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.