Fonction irrationnelle.

Partie A

1°) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $-x-2 \leq \sqrt{x^2+4x}$

2°) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -4[$: $-x-2 \geq \sqrt{x^2+4x}$

3°) Résoudre dans]-4; 0[l'inéquation suivante : $x+2 \leq \sqrt{-x^2-4x}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1+\sqrt{|x^2+4x|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1°) Déterminer le signe de $x^2 + 4x$ en fonction de x et en déduire les expressions de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale que l'on précisera.

3°) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe (C).

4°) f est-elle dérivable en 0 ? en -4 ?

5°) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$ puis pour $x \in]-4; 0[$.

6°) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

7°) Tracer les asymptotes puis la courbe (C).

.