Fonction rationnelle.

Partie A

Soit la fonction g définie sur R par :. $g(x) = x^3 - 3x - 8$.

1°) Étudier le sens de variation de g sur R.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur R dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $$f(x) = \frac{x^2(x+4)}{x^2-1}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$
(unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée)

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2°) a)Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}.$$

b) Montrer que la courbe (C) admet la droite Δ d'équation $y = x + 4$ pour asymptote oblique.

c) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ.

3°) Démontrer que la courbe (C) admet une autre droite asymptote.

4°) Démontrer que, sur $]1; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.

En déduire le tableau de variation de f.

5°) Existe-t-il un point la courbe (C) où la tangente à (C) est parallèle à la droite Δ ?

6°) Tracer la courbe (C) ainsi que les droites citées dans l'exercice.