I

I- Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$$

Simplifier l'écriture de g (x) .

II- Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

si $x \in]-\infty ; -1]$ $\quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

si $x \in]-1 ; +1[$ $\quad f(x) = \frac{x^2 + x}{2 - x^2}$

si $x \in [+1 ; +\infty[$ $\quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1) Comparer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $f(1)$; conclure.

2) Etudier de même la continuité de f en -1.

3) Pour tout réel non nul on pose

$$t_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Montrer que $t_1(h)$ admet une limite :
– d'une part lorsque h tend vers 0 en restant strictement positif ;
– d'autre part lorsque h tend vers 0 en restant strictement négatif.
La fonction f est-elle dérivable au point 1 ?

4) Montrer que f est dérivable au point -1.

5) Etude de la continuité et dérivabilité sur chaque intervalle de $\mathbf{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

6) Etudiez les variations de f sur chaque intervalle de $\mathbf{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

7) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .

8) En déduire les asymptotes puis la représentation graphique de f avec
   a) Ses asymptotes
   b) Les tangentes (ou demi-tangentes) au point de la courbe d'abscisse – 1 et au point de la courbe d'abscisse 1 .