

Classe de terminale S₅

Vendredi 18 octobre 2002

Devoir de mathématiques

N°4

Exercice 1) (type bac, 12 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et on appelle C la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1) Etude d'une fonction auxiliaire

On appelle g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

- Etudier le sens de variation de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
- Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Etude des variations de f

- Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f .
- Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- Tracer la tableau de variations de f .

3) Tracé de C

- Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c, d tels que pour tout x : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$
- En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à C . Etudier la position de C par rapport à Δ et préciser les coordonnées de leur point d'intersection A .
- Déterminer les abscisses des points B et B' où C admet une tangente parallèle à Δ .
- Tracer Δ et C en précisant les points A, B et B'

Exercice 2) (sorti tout droit de mon cerveau malade, 8 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x$$

- Quel est le sens de variation de f_n ? Exprimer $f_n(x)$ à l'aide du symbole Σ .
- Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution que l'on notera a_n .
- Montrer que $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$, en déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $a_n > \frac{1}{2}$
- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + 1$. En déduire que $a_{n+1} \leq a_n$.
- Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite l et que $\frac{1}{2} \leq l$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{2^n} \leq f_n(l)$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $f_n(l) \leq 1$. En déduire la limite de la suite $(f_n(l))$.
- Montrer que $f_n(l) = l \frac{1-l^n}{1-l}$. En déduire que $\frac{l}{1-l} = 1$, puis la valeur de l .