

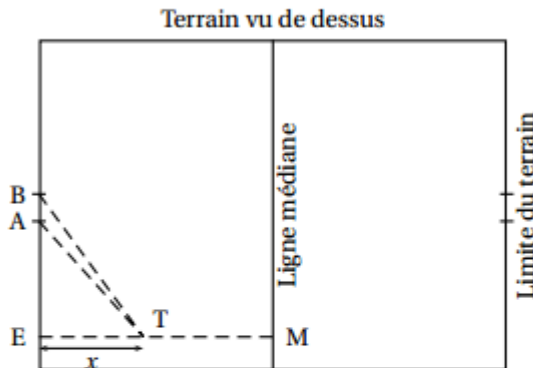
EXERCICE 4

5 POINTS

Commun à tous les candidats

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle \widehat{ATB} le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5,6$ m . On note α la mesure en radian de l'angle \widehat{ETA} , β la mesure en radian de l'angle \widehat{ETB} et γ la mesure en radian de l'angle \widehat{ATB} .

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction \tan est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
3. L'angle \widehat{ATB} admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}.$$

$$\text{Montrer que } \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

4. L'angle \widehat{ATB} est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle \widehat{ATB} à 0,01 radian près.