<u>Exercice 11</u> : ***Etude de fonction***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x$

1) Démontrer que f est périodique de période 2π.
2) a) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

   b) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-3\sqrt{2}\sin x\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
3) A l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de la dérivée puis dresser la tableau de variations sur $[-\pi,\pi]$.
4) a) Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R},\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

<u>Exercice 12</u> *:* ***Etablir une inégalité*** :

<u>1ère partie :</u> On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=sin\,x-x$.

1) Dériver f. En déduire les variations de f.
2) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$

   En déduire que, pour tout réel $x\geq 0$, on a : $sin\,x\ \leq x$.

<u>2nde partie :</u> On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=sin\,x-x+\frac{x^3}{6}$.

1) Dériver g. Peut – on conclure sur le signe de $g'(x)$?
2) On note g'' la dérivée de la fonction g', appelée $érivée\ seconde\ de$ g.
   a) Calculer $g''(x)$. Quel est le signe de $g''(x)$?
   b) Dresser alors le tableau de variations de g'.
   c) Quel est le signe de g' ? En déduire le tableau de variations de g.
   d) Dresser le tableau de signe de g.
3) En déduire que, pour tout réel $x\geq 0$, on a : $x-\frac{x^3}{6}\leq sin\,x$.