Soient a, b 2 réels strictement positifs : 1°, Démontrer que :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

2°. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{a+b+x}{3}\right)^3$$

Étudier les variations de f et montrer qu'elle admet un minimum, en déduire que le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est supérieur ou égal à ab.

3°. En déduire que pour tous réels $a>0$; $b>0$ et $c>0$ on a :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$