On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4. On pose $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

a. En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.