

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

### Partie A : Étude de la fonction $f$

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction  $f$ .
5. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.  
Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
7. Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  
Donner un encadrement de  $\alpha$ , au centième près.
8. On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 1$ .  
Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

### Partie B : Calcul d'aire

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine  $D_n$  délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$ . On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
2.
  - a. Justifier que l'aire du domaine  $D_n$  est  $I_n$ .
  - b. Calculer la limite de l'aire du domaine  $D_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .