

Exercice 3*9 ou 10 points***Partie A**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^x - xe^x + 2$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution. On note α cette solution.

A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+2}{e^x - x}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
3. En déduire le tableau de variation de f .

Partie C

1. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f au point d'abscisse 0.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) - (x+2) = \frac{(-x-2)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$
3. En déduire la position relative de Δ et $\mathcal{C}$ sachant que, pour tout réel x , $e^x - x \geq 1$.