

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

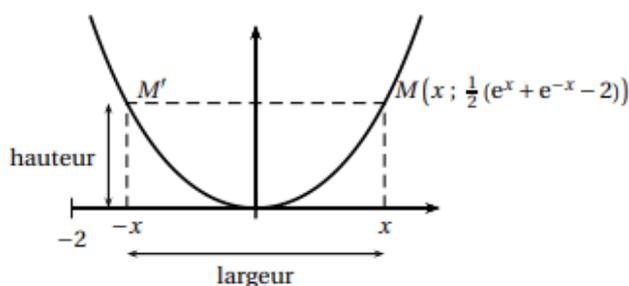
$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

- Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

- On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

- Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$.
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$.
 - En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.
 - On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α .

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a , b et m sont des nombres réels :

Tant que $b - a > 0,1$ faire :

$$m \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Si $e^m + e^{-m} - 4m - 2 > 0$, alors :

$$b \leftarrow m$$

Sinon :

$$a \leftarrow m$$

Fin Si

Fin Tant que

- a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

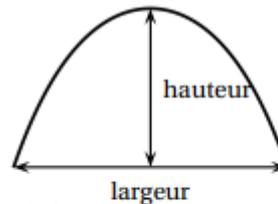
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b - a$
	2	3	1
2,5			
...	

- b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.

Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.