

Soit  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1.
  - a. Étudier les variations de la fonction  $g$ .
  - b. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à  $[-1 ; 0]$ .
3. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

---

### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
2.
  - a. Démontrer que, pour tout  $x > 1$ ,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

- b. En déduire que, pour  $x > 1$ ,

$$0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}.$$

- c. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ .

Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $4x^3 e^{-2x+1} = \frac{e}{2}(2x)^3 e^{-2x}$  puis montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

- d. On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
En utilisant la question précédente, déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$ .
4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .