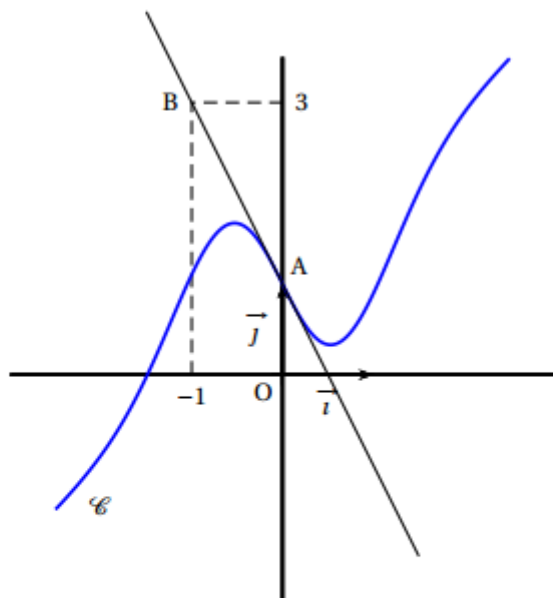


Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0; 1)$ et $(-1; 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.
- b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
- c. Démontrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

- d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
Déterminer la valeur du réel a .

2. D'après la question précédente, pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

- a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -1; 0]$, $f(x) > 0$.
- b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f'(x) > 0$.
- c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.