

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie sur  $[-1 ; 1]$  par

$$g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

où  $a$  est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction  $g$ .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel  $a$  soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f$  par  $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$  pour tout réel  $x \geq 0$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Vérifier que  $f'(0) = -2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .
2. On note  $f''$  la fonction dérivée de  $f'$ .  
Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f''(x) = 4xe^{2x}$ .
3. Montrer que, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f'$  s'annule pour une unique valeur, notée  $x_0$ .
4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , puis montrer que  $f(x)$  est négatif pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; x_0]$ .  
b. Calculer  $f(2)$ .  
En déduire que sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  s'annule pour une unique valeur.  
Si l'on note  $a$  cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de  $a$  arrondie au centième.
5. On admet sans démonstration que la longueur  $L$  de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre  $a$ .