

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur \mathbb{R} par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
2. Comparer les fonctions h_n et g'_n , g'_n étant la dérivée de la fonction g_n .
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.