

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

- a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g .

- b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.

- c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

- a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

- c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

- e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.