

(d après problème asie 98)

I

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout x associe :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2.$$

1. a. Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est

$$g'(x) = x(e^x + 2)$$

- b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Montrer que α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$.

II

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1. Montrer que les équations : $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0 ; +\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I .
2. a. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c. Dresser le tableau de variation de f .
d. Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0 ; +\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.