

On considère les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathcal{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathcal{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathcal{C}_2)$.
 - a. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_A)$ à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point A.
 - b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_B)$ à la courbe $(\mathcal{C}_2)$ au point B.
 - c. En déduire que les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a &= -2b \\ e^a - ae^a &= b^2 - 1 \end{cases}.$$

- d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$\begin{cases} e^a &= -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 &= 0 \end{cases}.$$

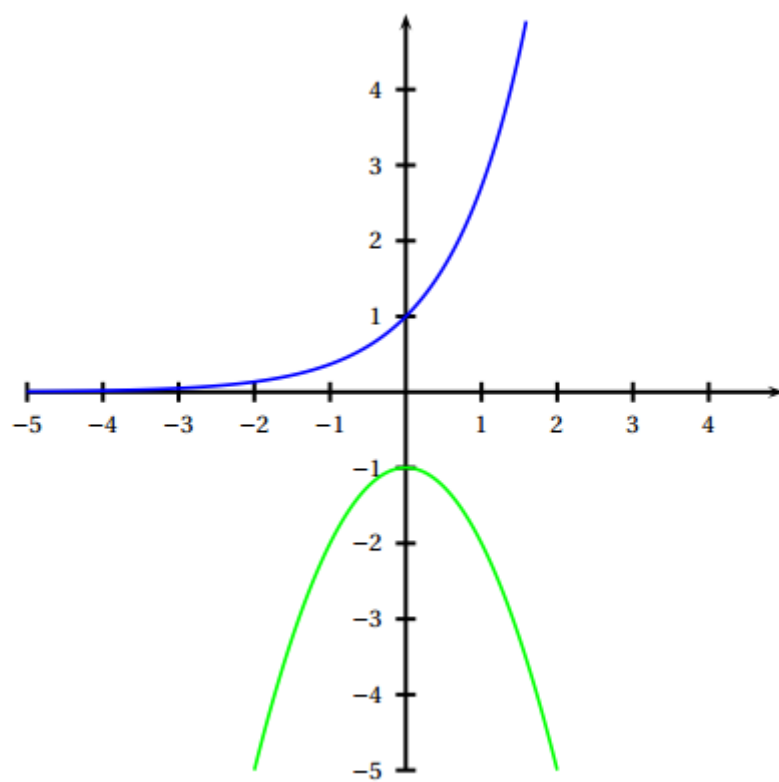
3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

- a. Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.
 - b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty ; 0[$.
 - c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .
4. On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues.



Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)