I. (*3 points*). Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \dfrac{1}{e}$ **b)** $e^{x^2} < \left(e^3\right)^4 . e^{-x}$ **c)** $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

II. (*5 points*). **Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = e^x(1-x)+1$

1. Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe représentative de g.

2. Etudier le sens de variation de g.

3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1{,}27\ ;\ 1{,}28]$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$. Justifier que $g(x)>0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x)<0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

5. Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

(*4 points*). **Partie B : Etude de la fonction f**, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2$

1. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **partie A**.

2. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

EXERCICE 3

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
   a) Etudiez les variations de g et en déduire son signe.
   b) Justifier alors le domaine de définition de f.
2. a) Calculez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interprétez graphiquement les résultats obtenus.
   b) Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.
   c) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Etudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.