## *1. Exercice 2 (6 points)*

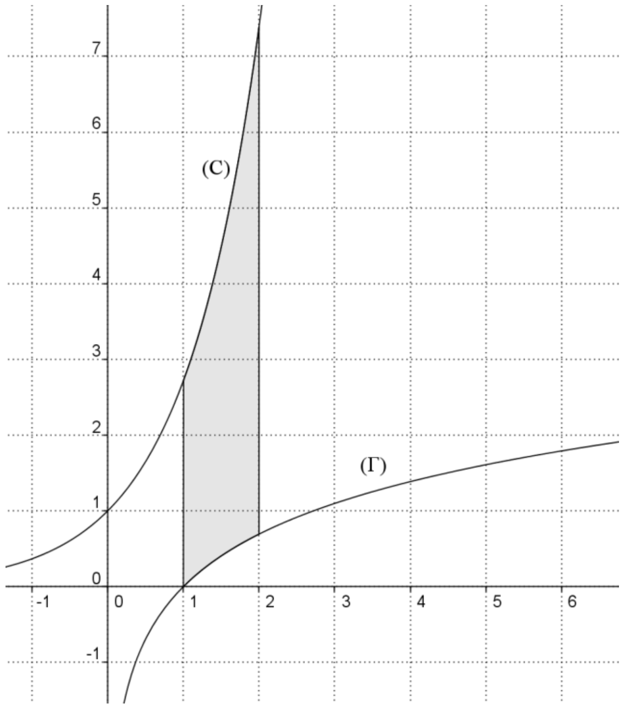
1. Soit *f* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=xe^{x}-1$.

a. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$ et étudier le sens de variation de *f*.

b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x*.

2. On note $(\mathrm{C})$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $(\Gamma)$ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.




Les courbes $(\mathrm{C})$ et $(\Gamma)$ sont donnée ci-contre.

Soit *x* un nombre réel strictement positif. On note M le point de $(\mathrm{C})$ d'abscisse *x* et N le point de $(\Gamma)$ d'abscisse *x*.

On rappelle que pour tout réel *x* strictement positif, $e^{x}>\ln x$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x=\alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à $10^{-2}$ près.

b. En utilisant la question 1., montrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $(\mathrm{C})$ au point d'abscisse $\alpha$ et la tangente à $(\Gamma)$ au point d'abscisse $\alpha$ sont parallèles.3. a. Soit *h* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=x\ln x-x$. Montrer que la fonction *h* est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure précédente.