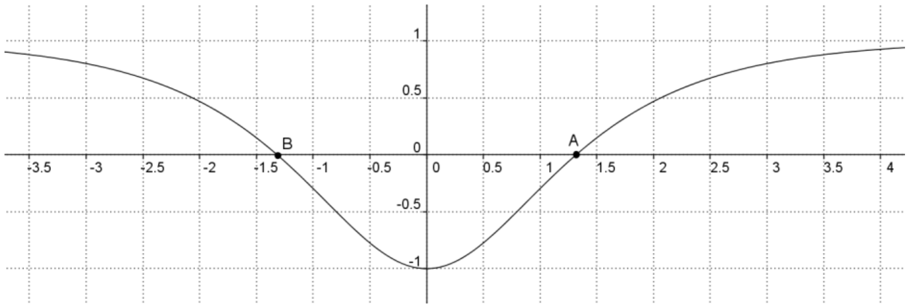
1. Exercice 3 (6 points)

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe (C). Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction *f* que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction *f* semble croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

a. Vérifier que pour tout réel *x*, $f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. La droite d'équation *x* = 0 semble être un axe de symétrie de la courbe (C). Démontrer que cette conjecture est vraie.

3. On désigne par *a* l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

a. Démontrer que le réel *c* est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de *a*.

b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de *x*.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction *F* définie sur ℝ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Déterminer les variations de la fonction *F* sur ℝ.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \le F(a) \le 0$.

3. On cherche la limite éventuelle de *F* en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout réel positif *t*, $f(t) \geq 1-4e^{-t}$.

b. En déduire que pour tout réel positif *x*, $F(x) \geq x-4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.

4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$.