1. Exercice 3 (7 points)

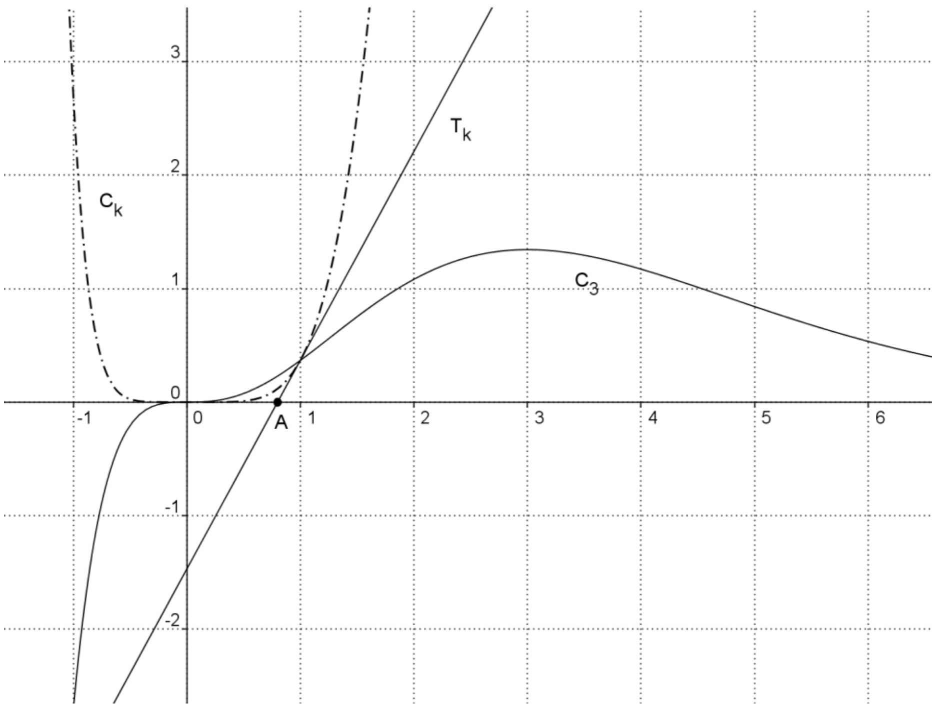
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur ℝ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3.



La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Démontrer que pour $n > 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.

b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier *k*.

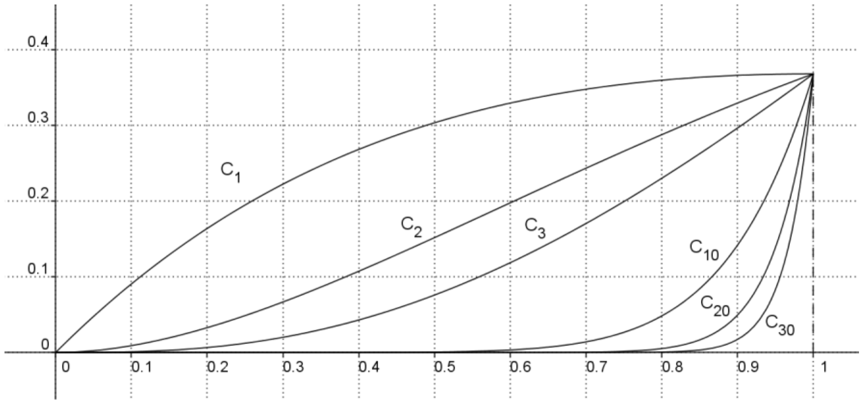
Partie B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30} comprises dans la bande définie par $0 \le x \le 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.