1. Exercice 4 (6 points)

Partie A

On considère la fonction *g* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.

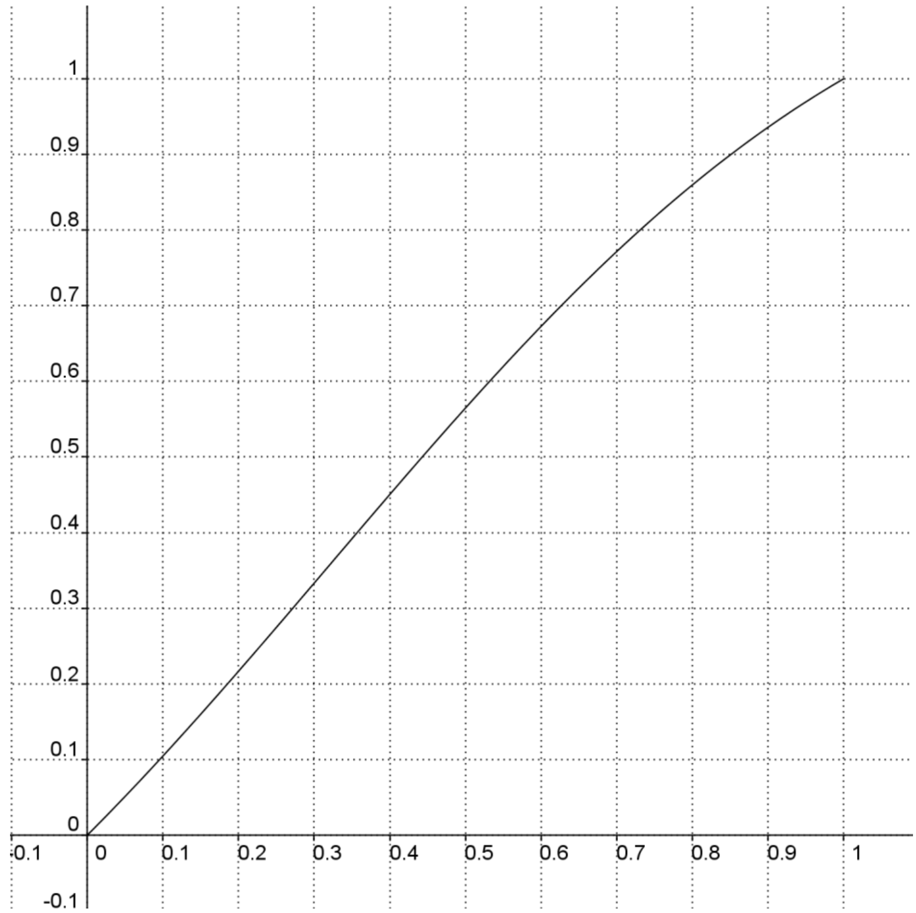
1. Étudier les variations de la fonction *g*.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.

3. En déduire que pour tout *x* de $[0\,;+\infty[$, $e^x-x>0$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. La courbe (C) représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



On admet que *f* est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que pour tout *x* de $[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0\,;1]$.

3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0\,;1]$.

b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite