

1. Exercice 3 (6 points)

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) .

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A .

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B .

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont

solutions du système $(S) : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système $(S') : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .

4. On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues.

