

PROBLEME (11 points) commun à tous les candidats

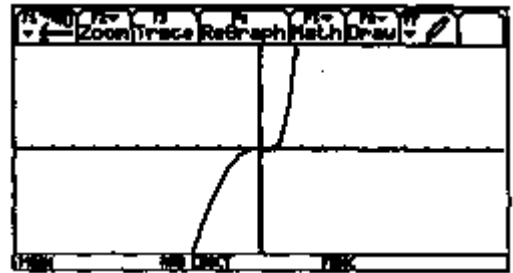
On considère la fonction numérique f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjonctures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

- le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?
- la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : Contrôle de la première conjecture.

1°- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2°- Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$
- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .

c) En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbf{R} . On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.

e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3°- Sens de variation de la fonction f sur \mathbf{R} .

a) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f .

c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B Contrôle de la deuxième conjecture.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1° Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$

2°- On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x + 2)}$

a) Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0 ; 1]$.

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3°- a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe ($x'x$).

b) Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.

c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : Tracé de la courbe.

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle $[-0,2 ; 0,4]$, dans le repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec les unités suivantes

Sur l'axe ($x'x$) : 1 cm représentera 0,05. Sur l'axe ($y'y$) : 1 cm représentera 0,001.

I- Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n.10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,20	-0,15	-0,10	-0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
f(x)													

2°- Tracer alors l' dans le repère choisi.