On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

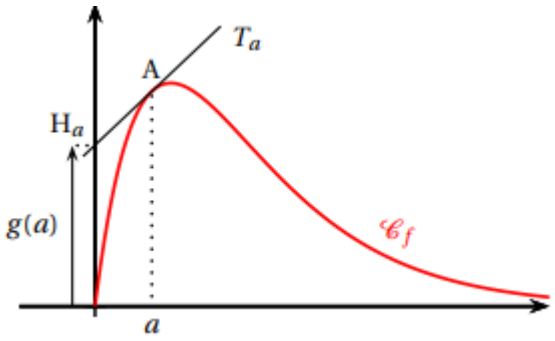
$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left[(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.

c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.