On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x+1)e^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
   b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. **a.** Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = e^{x}g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.