PROBLÈME *(11 points)* commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans R par

$$\varphi(x) = e^x + x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en + ∞ et - ∞.

2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$$

3. En déduire le signe de φ (x) sur **R**.

PARTIE B

Soit la fonction *f* définie sur **R** par

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que : $$f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}.$$

En déduire le sens de variation de *f*.

2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.

4. Chercher les limites de *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.

5. Faire le tableau de variation de *f*.

6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à [-2,4].