PROBLEME (extrait inde 97) *feuille 20*

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$; unité graphique 2 cm.

Partie A - Étude et représentation graphique de la fonction *f*

1. *a)* Montrer que, pour tout réel x, $f(-x)+f(x)=2$. (0,5 *point*)
En déduire que Γ possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées. (0,5 *point*)
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. (0,25 *point*)
Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra par exemple utiliser **1.** *a)* ou poser $X=e^x$). (0,25 *point*)
En déduire que Γ possède deux asymptotes dont on précisera les équations.
(0,25 *point*)
c) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f. (0,5 *point*)

2. *a)* Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.
(0,25 *point*)
b) On considère la fonction φ définie sur R par $\varphi(x)=f(x)-(x+1)$.

Montrer que, pour tout réel x, $\varphi'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$. (0,5 *point*)

En déduire le sens de variation de la fonction φ puis son signe (on précisera $\varphi(0)$).
(0,5 + 0,25 *point*)
c) Déduire de ce qui précède la position de la courbe Γ par rapport à la droite T.
(0,5 *point*)

3. Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j}\,)$ la droite T ainsi que la courbe Γ et ses asymptotes.
(0,5 *point*)

Partie B - Calcul d'aire

1. *a)* Montrer que $f(x)=x$ si et seulement si $\varphi(x)=-1$. (0,25 *point*)
b) En déduire, en utilisant les résultats de **A. 2.**, que la droite D d'équation $y=x$ coupe la courbe Γ en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3. (0,5 *point*)

2. *a)* Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1.$ (0,5 *point*)

En déduire une primitive F de f sur **R**. (0,5 *point*)
b) Exprimer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par la courbe Γ, la droite D et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.