

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t , $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit -elle au cours de sa chute?
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est $15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est -elle détachée de son nuage? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.