Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0~;~\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0; 4]$.