Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
2. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u \to +\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0\,; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0\,; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_α a pour équation $y = Ax$. Tracer T_α, puis la courbe $\mathscr{C}$.
5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.
6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]0\,; +\infty[$.
   a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
   b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.