

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) &= 1. \end{cases}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - b. Établir que, pour tout nombre réel  $x$  non nul, on a  $f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .  
En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Donner, sans démontrer, la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$  et démontrer que  $f$  est continue en 0.
3.
  - a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $e^x \geq x + 1$ , et que l'égalité n'a lieu que pour  $x = 0$ .
  - b. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et déterminer la fonction  $g$  telle que, pour tout nombre réel  $x$  non nul,  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$ .
  - c. Donner le tableau des variations de  $f$ .
4. Soient  $x$  un nombre réel non nul et les points  $M(x; f(x))$  et  $M'(-x; f(-x))$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .
  - a. Établir que  $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ , puis déterminer le coefficient directeur de la droite  $(MM')$ .
  - b. On admet que la fonction  $f$  est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?